大学数学のアトリエ｜線形代数　第 1 章　行列

No.3　逆行列

この回のゴール

- 正則行列・逆行列の定義を説明でき，逆行列がただ 1 つしかないことを示せる．
- 2 次正方行列が正則かどうかを判定し，逆行列を求められる．
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ などの性質を使える．
- 逆行列を使って連立方程式を解ける．

■ 1. 行列で「割る」には

数の方程式 $ax = b$ は，$a \neq 0$ なら両辺に $a^{-1} = \frac{1}{a}$ を掛けて $x = a^{-1}b$ と解ける．ここで a^{-1} は「a と掛けると 1 になる数」である．

行列でも $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を同じように解きたい．ところが行列の割り算は定義されていない．そこで，**「A と掛けると単位行列 E になる行列」**を考える．

定義 1　正則行列・逆行列

n 次正方行列 A に対して，

$$AX = XA = E_n$$

を満たす n 次正方行列 X が存在するとき，A は**正則**である（正則行列である）という．このとき X を A の**逆行列**といい，A^{-1} と書く．

注意

- 逆行列を考えるのは**正方行列だけ**である．
- A^{-1} を $\dfrac{1}{A}$ と書いてはいけない．行列の割り算は定義していない．
- $AX = E$ と $XA = E$ の**両方**を要求している．積は交換できないので，片方だけでは足りないように見える．実は正方行列なら片方から他方が従うが，それは第 3 章で行列式を使って確かめる．

定義では「A^{-1}」と，あたかも 1 つに決まるかのように書いた．それが正しいことを確かめておこう．

定理 1　逆行列の一意性

正則行列 A の逆行列はただ 1 つである．

【証明】 X，Y がどちらも A の逆行列，つまり $AX = XA = E$，$AY = YA = E$ だとする．結合法則を使うと

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y.$$

よって $X = Y$．　□

例 1　正則でない行列

零行列 O は正則でない（何を掛けても O で，E にならない）．

O 以外にも正則でない行列はある．No.2 の例で $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ は $CD=O$ を満たした．もし C が正則なら，左から C^{-1} を掛けて $D=C^{-1}CD=C^{-1}O=O$ となるが，$D\neq O$ なので矛盾．よって C は正則でない．

■ 2．2 次正方行列の逆行列

定理 2　2 次正方行列の逆行列

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする．

$$A \text{ が正則} \iff ad-bc\neq 0.$$

このとき

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

【証明】$\tilde{A}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ とおくと，計算により

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=(ad-bc)E. \qquad (*)$$

($\Leftarrow$) $ad-bc\neq 0$ なら，$(*)$ の両辺を $\frac{1}{ad-bc}$ 倍して $X=\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}$ が $AX=XA=E$ を満たす．

($\Rightarrow$) 対偶を示す．$ad-bc=0$ とすると $(*)$ より $A\tilde{A}=O$．もし A が正則なら，左から A^{-1} を掛けて $\tilde{A}=O$，つまり $a=b=c=d=0$ で $A=O$．しかし O は正則でないので矛盾．よって A は正則でない．

□

コラム：$ad-bc$ の正体

$ad-bc$ は，第 3 章で学ぶ**行列式**（2 次の場合）である．幾何的には，2 つの列ベクトル $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の（向きつきの）面積を表す．面積が 0，つまり 2 本のベクトルがつぶれて一直線に並んでしまうと，元に戻す（逆行列を作る）ことができない．

例 2

$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ は $3\cdot 2-5\cdot 1=1\neq 0$ なので正則で，

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

実際に $AA^{-1}=E$ となることを確かめてみよう．

公式の覚え方

a と d（対角成分）は**入れ替え**，b と c は**符号を変える**，最後に $ad-bc$ で割る．

■ 3. 逆行列の性質

定理 3　逆行列の性質

A，B を n 次正則行列，c を 0 でない実数とする．

(1) A^{-1} は正則で，$(A^{-1})^{-1}=A$.

(2) AB は正則で，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.　（順番が逆）

(3) ${}^tA$ は正則で，$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$.

(4) cA は正則で，$(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$.

「X が Y の逆行列である」ことを示すには，$XY=YX=E$ **を確かめれば十分**である（定理 1 により逆行列は 1 つしかないから）．この方針で (2)，(3) を示す．

【証明】(2)　$X=B^{-1}A^{-1}$ とおく．結合法則を使って

$$(AB)X=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$X(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

よって AB は正則で，逆行列は $B^{-1}A^{-1}$.　□

【証明】(3)　No.2 の ${}^t(XY)={}^tY\,{}^tX$ を使う．

$${}^tA\,{}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}A)={}^tE=E,\qquad {}^t(A^{-1})\,{}^tA={}^t(AA^{-1})={}^tE=E.$$

よって ${}^tA$ は正則で，逆行列は ${}^t(A^{-1})$.　□

例 3

$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすると，$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ で，

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}4&-3\\-5&4\end{pmatrix},\qquad A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}.$$

順番を間違えると別の行列になる．

逆行列があれば，数のときと同じように「両辺を割る」に相当する操作ができる．

定理 4　正則行列は約分できる

A を正則行列とする．

(1) $AB=AC$ ならば $B=C$.

(2) $AB=O$ ならば $B=O$.

【証明】(1) 両辺に**左から** A^{-1} を掛けると $A^{-1}AB=A^{-1}AC$，つまり $B=C$．(2) は (1) で $C=O$ とした場合．　□

注意

掛ける向きに注意．$AB = AC$ に対して A^{-1} を**右から**掛けても $ABA^{-1} = ACA^{-1}$ となるだけで，A は消えない．行列の等式では「左から掛ける」「右から掛ける」を必ず区別する．

■ 4. 連立方程式への応用

定理 5

A が n 次正則行列なら，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

をもつ．

【証明】$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ を代入すると $A(A^{-1}\boldsymbol{b}) = E\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ なので，これは解である．逆に $\boldsymbol{x}$ が解なら，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$．よって解はこれ 1 つだけである．□

例題 1

逆行列を用いて，連立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ を解け．

【解答】$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと方程式は $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$．例 2 より $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって $x = 3$，$y = -1$．

3 次以上の正方行列の逆行列は，次回 No.4 の**行基本変形**を使って求める．

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求め，それを用いて $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 8 \end{cases}$ を解け．

2. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ は正則か．

3. $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & k+1 \end{pmatrix}$ が正則となるような実数 k の条件を求めよ．

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，$AB = O$ となる O でない 2 次正方行列 B を 1 つ見つけ，それを使って A が正則でないことを示せ（定理 2 を使わずに）．

5. A が正則なとき，自然数 n について A^n は正則で $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ であることを示せ．

6. 正方行列 A について，次を示せ．

(1) $A^2 = O$ ならば，$E - A$ は正則で $(E - A)^{-1} = E + A$.

(2) $A^3 = O$ ならば，$E - A$ は正則で $(E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

7. 正則行列 A が $A^2 = A$ を満たすならば $A = E$ であることを示せ．

8. 定理 3 の (1)，(4) を示せ．

9.（考えてみよう）A，B がどちらも正則でも，$A + B$ は正則とは限らない．そのような例を挙げよ．

■ 練習問題の解答

1. $2\cdot 3-1\cdot 5=1$ より $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

よって $x=1$, $y=1$.

2. $2\cdot 6-(-4)(-3)=12-12=0$ なので正則でない.

3. $k(k+1)-2\cdot 3=k^2+k-6=(k-2)(k+3)$. これが 0 でない条件なので $k\neq 2$ かつ $k\neq -3$.

4. 例えば $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ とすると $AB=O$. もし A が正則なら定理 4 (2) より $B=O$ となるが, $B\neq O$ なので矛盾. よって A は正則でない.

5. $X=(A^{-1})^n$ とおく. $A^nX=A\cdots A\,A^{-1}\cdots A^{-1}$ で, 真ん中の $AA^{-1}=E$ から順に消えていき E になる. $XA^n=E$ も同様. (厳密には n に関する帰納法：$A^{n+1}(A^{-1})^{n+1}=A^n(AA^{-1})(A^{-1})^n=A^n(A^{-1})^n=E$.)

6. (1) $(E-A)(E+A)=E+A-A-A^2=E-A^2=E$. $(E+A)(E-A)=E-A^2=E$ も同様.
(2) $(E-A)(E+A+A^2)=E+A+A^2-A-A^2-A^3=E-A^3=E$. 逆向きも同様.
※ 数の $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ と同じ形をしている.

7. $A^2=A$ の両辺に左から A^{-1} を掛けると $A^{-1}AA=A^{-1}A$, つまり $A=E$.

8. (1) $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ は,「A が A^{-1} の逆行列である」ことも表している. よって $(A^{-1})^{-1}=A$.
(4) $(cA)(c^{-1}A^{-1})=(cc^{-1})AA^{-1}=E$, $(c^{-1}A^{-1})(cA)=E$ も同様.

9. 例えば $A=E$, $B=-E$. どちらも正則（$E^{-1}=E$, $(-E)^{-1}=-E$）だが, $A+B=O$ は正則でない.